297. Fandiño Pinilla, M. I. (2018). Su alcune situazioni marginali didatticamente significative riscontrate in fase di ricerca: esempi e commenti. On some marginal and educationally significant situations encountered in the research phase: examples and comments. *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 29-46.
http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/88-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica-anno-27-aprile-2019-numero-1
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php
https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica/

Su alcune situazioni marginali didatticamente significative riscontrate in fase di ricerca: esempi e commenti

On some marginal and educationally significant situations encountered in the research phase: examples and comments

Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, c/o Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Abstract. *In this paper, we propose analyses of situations that were marginal to the topic of some research carried out several years ago. We develop reflections based on mathematics education aimed at evaluating the behaviour of students, that belong to different school levels, facing usual topics in the school activity.*

Keywords: analysis of mathematical texts, understanding of mathematical texts, the relationship between figure and text, proof in the classroom, the relationship between the definition and the image of figures in geometry, positional system.

Sunto. *In questo articolo si propongono analisi relative a situazioni rilevate in modo marginale rispetto al tema durante il corso di alcune ricerche effettuate diversi anni fa. Si effettuano su di esse delle riflessioni basate sulla didattica della matematica tese a valutare il comportamento degli allievi di diversi livelli scolastici in aula, di fronte a temi usuali nella prassi scolastica.*

Parole chiave: analisi dei testi matematici, comprensione dei testi matematici, relazione fra figura e testo, dimostrazione in aula, relazione fra definizione e immagine delle figure in geometria, sistema posizionale.

Resumen. *En este artículo analizamos algunas situaciones que fueron detectadas marginalmente durante el curso de investigaciones anteriores, investigaciones realizadas por nosotros. El análisis de estas situaciones se hizo tomando como base* *resultados de la teorización en didáctica de la matemática centrados en la evaluación de la actitud de los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad en relación con temas tradicionales en la práctica de enseñanza-aprendizaje de la matemática.*

Palabras clave: análisis de los textos de matemática, comprensión de los textos matemáticos, relaciones entre figura y texto, demostración en aula, relaciones entre definición e imagen de las figuras en geometría, sistema posicional.

1. Premessa

Negli anni fra il 2011 e il 2014 abbiamo lavorato nell'ambito del NRD di Bologna a una ricerca empirica su un tema classico, creare "Una formula per la misurazione oggettiva della difficoltà di comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti" (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015, p. 27). Questa ricerca era basata su ricerche precedenti analoghe di diversi illustri autori, fra i quali segnaliamo soprattutto Gagatsis (1982, 1984, 1985, 1995).

Prove fatte sia in italiano in Italia, sia in spagnolo in Colombia, mostravano che le formule precedenti non sembravano più attuali o, meglio, non più adeguate ai testi che circolano attualmente o forse agli studenti attuali. Inoltre non ci sembravano sufficientemente accurate nelle differenziazioni relative alla tipologia delle parole chiamate in causa nei testi.[1]

Grazie alla collaborazione di molti docenti di tutti i livelli scolari che si sono offerti come sperimentatori, alla fine siamo giunti a un risultato che le numerose prove empiriche hanno poi validato. A questo punto abbiamo pubblicato l'articolo di ricerca dapprima in inglese (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015), poi un suo lungo sunto in spagnolo (Fandiño Pinilla & D'Amore, 2015) e infine una terza versione (più rivolta al pubblico degli insegnanti che non ai ricercatori) in italiano (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016).

Pur servendoci dell'aiuto di numerosi, disponibili e gentili sperimentatori che si prestavano ad operare nelle loro classi (dalla scuola primaria alla fine della scuola secondaria di II grado), in moltissime occasioni, specie nelle fasi preparatorie, noi stessi abbiamo interagito con gruppi di studenti, per

[1] Come diremo meglio fra poche righe, si proponeva individualmente ai soggetti della ricerca un testo nel quale erano state cancellate alcune parole che dovevano essere da loro riconosciute leggendo il nuovo testo con le cancellazioni. Nella nostra formula, abbiamo classificato come segue la tipologia delle parole cancellate:

> c1) parole di lingua corrente non di carattere logico né tecnico (…);
> c2) parole tecniche della matematica (…);
> c3) parole di lingua a carattere logico (connettivi: non, e, o, implica, …; quantificatori: nessuno, alcuni, tutti, …; deduttivo: siccome, poiché, dimostra, …). (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016, p. 42)

Il risultato numerico che risulta dall'applicazione della formula di comprensione dipende in grande misura da questa suddivisione e da coefficienti numerici stabiliti per via euristica alle parole cancellate delle specifiche categorie.

verificarne di persona gli atteggiamenti, saggiare i risultati e ascoltare i pareri. Riteniamo infatti che sia sempre opportuno un preliminare contatto diretto con soggetti di tipologie analoghe a quelli che poi verranno sottoposti alla ricerca, per avere indicazioni di vario genere.

In queste occasioni, pur perseguendo come scopo quello descritto, abbiamo preso appunti su quel che accadeva in modo più generale, cioè non solo in relazione al tema di ricerca, ma anche in forma più diffusa, ripromettendoci di dedicare, prima o poi, un'analisi e una riflessione su alcuni particolari che ci avevano colpito.

Ci pare giunto il momento di dedicarci a questo breve resoconto analitico o, meglio, ad alcuni esempi che ci hanno colpito maggiormente.

2. Cenno alle modalità adottate nella ricerca relativa alla formula di comprensione

Per l'importanza che ha in quanto segue e per evitare al lettore di cercare gli articoli di riferimento, diremo esplicitamente che, nella ricerca, abbiamo seguito la cosiddetta "tecnica di chiusura":

> si sceglie un testo di matematica e si cancella una parola ogni n (la n-esima, la $2n$-esima e così via); lo studente è invitato a leggere il testo nel quale appaiono cancellazioni e a mettere nel posto lasciato vuoto dalla cancellazione la parola che gli sembra più opportuna per ridare un senso al testo che sta leggendo. (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016, p. 60)

Studi precedenti, da noi confermati empiricamente, mostrano come sia conveniente porre quell'n di cui sopra uguale a 5 (sia in italiano, sia in spagnolo); dunque i testi sui quali gli studenti dovevano lavorare erano così modificati: "abbiamo deciso di cancellare solo parole (anche se tecniche o specifiche) e non formule; le formule vengono lasciate inalterate e non vengono conteggiate fra le parole. Anche simboli isolati come lettere, numeri, segni di operazioni etc. sono considerati formule" (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016, p. 65). Uno dei testi completi scelti è il seguente (ultimi anni di scuola primaria, gradi 4-5):

> Con le dieci cifre che hai studiato gli anni scorsi, possiamo costruire tutti i numeri che vogliamo, all'infinito. Secondo il posto occupato dalle cifre, i numeri acquistano un valore diverso. Ogni raggruppamento di dieci oggetti forma una decina e si scrive 10. Se un numero è composto da due cifre, la cifra a destra rappresenta le unità (u), quella a sinistra le decine (da). 28 = 2 decine, 8 unità.

Eseguendo la cancellazione secondo le regole dette, il test affidato da ri-completare agli studenti è il seguente:

> Con le dieci cifre ______ hai studiato gli anni ______ , possiamo costruire tutti i ______ che vogliamo, all'infinito. ______ il posto occupato dalle ______, i numeri acquistano un ______ diverso. Ogni raggruppamento di ______ oggetti

> forma una decina si scrive 10. Se un ______ è composto da due ______, la cifra a destra ______ le unità (u), quella a ______ le decine (da). 28 = 2 decine, 8 unità.

Un altro dei testi completi scelti è il seguente (ultimo anno di liceo scientifico, anno scolastico 13):

> Consideriamo la funzione reale f di variabile reale x espressa da $y = f(x)$ ed il punto di ascissa $x = c$ appartenente al dominio di essa. La valutazione diretta della f in corrispondenza dell'ascissa $x = c$ descrive, tradizionalmente, il comportamento della funzione data nel punto di ascissa $x = c$.

Ed ecco il testo con le parole cancellate:

> Consideriamo la funzione reale f ______ variabile reale x espressa da $y = f(x)$ ______ il punto di ascissa $x = c$ ______ al dominio di essa. ______ valutazione diretta della f in ______ dell'ascissa $x = c$ descrive, tradizionalmente, ______ comportamento della funzione data ______ punto di ascissa $x = c$.

Con queste premesse, il lettore è ora in grado di seguire le successive riflessioni basate su alcuni fatti accaduti nelle aule nelle occasioni in cui abbiamo partecipato personalmente alla ricerca come sperimentatori o nelle fasi esploratorie che precedevano la ricerca stessa.

3. L'inatteso ruolo asemantico del titolo dei capitoli

Il capitolo di un testo destinato agli studenti di II secondaria di primo grado (a. s. 7) presentava, iniziando ovviamente in una pagina dispari, il tema "Media aritmetica" proponendo i seguenti titolo e discorso preliminare:

Media aritmetica

> In statistica, si chiama media aritmetica di due o più numeri, o semplicemente media, la somma dei valori numerici divisa per il numero di valori numerici considerati. Per calcolare la media aritmetica tra due o più numeri basta dunque sommarli e poi dividere il risultato ottenuto per il numero dei valori.

Il docente sperimentatore suggeriva questo testo scolastico come perfettamente idoneo per eseguire le prove empiriche che noi volevamo effettuare nel III anno di scuola secondaria di primo grado (a. s. 8). In base alle regole di cancellazione, agli studenti venne presentato il seguente testo, una parola cancellata ogni 5; ricordiamo che il compito degli studenti sottoposti alla prova era di scrivere, al posto delle parole cancellate, quella parola che, a loro avviso, era la più idonea a ridare senso al testo. (Come abbiamo già detto sopra, non era necessario che la parola fosse esattamente quella da noi cancellata, dovevano essere accettati dallo sperimentatore anche i sinonimi). Il testo dato come prova era dunque il seguente:

Media aritmetica

> In statistica, si chiama ______ aritmetica di due o ______ numeri, o

> semplicemente media, ______ somma dei valori numerici ______ per il numero di ______ numerici considerati. Per calcolare _____ media aritmetica tra due ______ più numeri basta dunque ______ e poi dividere il ______ ottenuto per il numero ______ valori.

La prima parola cancellata, la quinta del brano, “media”, è richiamata fortemente in congiunzione all’aggettivo “aritmetica” (che appare nel testo come sesta parola, dunque non cancellata) nel titolo del capitolo, al centro della pagina-test a pochissima distanza. Il titolo recita: “Media aritmetica”; la quinta parola del brano (cancellata) fa coppia con la sesta (non cancellata): “_____ aritmetica”.

Ebbene, a sorpresa, riempire il primo vuoto con la parola “media”, fatto che a prima vista a noi appariva come immediato e ovvio, ha costituito invece per molti studenti un ostacolo, da parte nostra del tutto inatteso. Poiché il brano proposto conteneva il titolo e quelle due parole replicavano esattamente tale titolo, ci si aspettava che una grande percentuale di studenti avrebbe saputo riempire il primo spazio vuoto, creato dalla cancellazione della quinta parola, in modo immediato e corretto. Se tale parola non fosse stata riconosciuta grazie alla comprensione del testo, pensavamo potesse essere dedotta dalla presenza del titolo di poche righe precedente. Anche perché l’aggettivo non cancellato appare ripetuto.

E invece molti studenti hanno scritto al posto della prima parola cancellata (media) altre e ben diverse parole; fra le parole scelte appaiono: operazione (la più scelta), espressione, somma, uguaglianza, … perfino linea e alcuni sostantivi al maschile, nonostante l’aggettivo apparisse al femminile: numero, valore, …

Essendo, in quel frangente, focalizzati su tutt’altro, ci siamo limitati lì per lì a prendere nota di questo fatto interessante e (per noi) sorprendente, senza avere in quella circostanza l’occasione di compiere indagini. Ma immediati colloqui informali ci hanno mostrato come la supposta informazione costituita dal titolo del capitolo, che per un adulto è consistente fonte di informazione relativa al contenuto del capitolo stesso, non comporta affatto un’indicazione analoga per lo studente. Il titolo del capitolo, cioè, non viene recepito come indicazione relativa ai contenuti di esso, ma come parole messe lì, quasi a caso, senza un nesso logico o indicativo con quel che segue.

Mai avevamo pensato a un fenomeno di questo tipo, ma ci siamo ripromessi allora di segnalarlo, come facciamo qui ora, per sollecitare gli insegnanti a far capire agli studenti che cosa è e a che cosa serva il titolo di un capitolo di un libro, di un testo scritto.

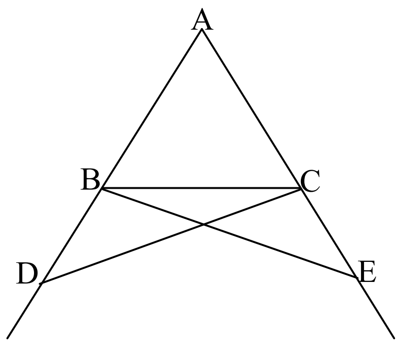
C’è però anche da segnalare il fatto che, spesso, nei test, lo studente ritiene che una risposta troppo ovvia costituisca un “trucco”; in questi casi è indotto a cercare risposte che giudica più consone alla situazione, risposte cioè non troppo scontate.

4. Sul come le figure che illustrano un testo scritto, illustrano *davvero* un testo scritto

In una prima classe di scuola secondaria di secondo grado (a. s. 9), verso la fine dell'anno scolastico, la docente sta trattando il tema delle dimostrazioni. Dopo aver condotto lei stessa alla lavagna alcune dimostrazioni in modo esemplare, tutte nel campo della geometria, suggerisce agli studenti di leggere o, meglio, verificare, capire, esaminare, studiare alcune dimostrazioni riportate sul libro di testo. Lo scopo è quello di far sì che gli studenti si lancino in dimostrazioni personali, seguendo quei modelli.

Anche sulla spinta dei consigli di quella insegnante, decidiamo che questo è un bel campo nel quale effettuare alcune prove empiriche del nostro test di comprensione. E così scegliamo il seguente testo di una dimostrazione di Euclide (teorema 5 del libro I):

> Teorema. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali tra loro.



> Dimostrazione.
>
> Sia ABC un triangolo isoscele con AB = AC; il lato BC sia la base del triangolo. Si prolunghi AB fino a un punto D. Si prolunghi AC fino a un punto E, tale che CE = BD. Si traccino i segmenti CD e BE. Si noti che AD = AE perché ciascuno è somma di segmenti uguali. Si considerino i triangoli ABE e ACD; tali triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dato che essi hanno due lati uguali (AD = AE e AC = AB) e l'angolo A in comune. Dunque BE = CD. Si noti che gli angoli ACD e ABE sono uguali. D'altra parte, anche i due triangoli BCD e CBE sono congruenti per il terzo criterio (BD = CE, BE = CD e BC in comune). Dunque gli angoli CBD e BCE sono uguali. In conclusione, gli angoli ABC e ACB sono uguali in quanto differenza di angoli uguali.

Come si è visto sopra, e come sempre succede nei libri scolastici di geometria, la dimostrazione è accompagnata da una figura che la illustra. Il suggerimento implicito dato per ovvio è il seguente: lo studente dovrebbe leggere il testo nella sua versione scritta e, nel contempo, seguire il disegno illustrativo passo

passo per capirne il senso. Ecco il test che si ricava dalla nostra usuale cancellazione:

Dimostrazione.

Sia ABC un triangolo isoscele _____ AB = AC; il lato BC sia la _____ del triangolo. Si prolunghi AB _____ a un punto D. Si _____ AC fino a un punto E, _____ che CE = BD. Si traccino i _____ CD e BE. Si noti che AD = AE _____ ciascuno è somma di _____ uguali. Si considerino i _____ ABE e ACD; tali triangoli sono _____ per il primo criterio _____ congruenza dato che essi _____ due lati uguali (AD = AE e AC = AB) _____ l'angolo A in comune. _____ BE = CD. Si noti che gli _____ ACD e ABE sono uguali. D'_____ parte, anche i due _____ BCD e CBE sono congruenti per _____ terzo criterio (BD = CE, BE = CD e BC in _____). Dunque gli angoli CBD e BCE _____ uguali. In conclusione, gli _____ ABC e ACB sono uguali in _____ differenza di angoli uguali.

La consegna di scrivere al posto degli spazi vuoti le parole che si suppongono essere state cancellate o loro sinonimi è molto superiore alle forze della maggior parte degli studenti invitati a collaborare. Tanto che l'insegnante, presente alla prova, spinge esplicitamente gli allievi a seguire la figura per capire i singoli passaggi descrittivi del testo e, grazie a questo esame, cercare di ricostruirlo. Ma questo invito sembra cadere nel vuoto. Lo studente, in generale, sembra non saper coordinare quel che legge nel testo con quel che vede nella figura che dovrebbe illustrarlo. D'altra parte, destrutturare una figura già completa, sulla base del testo della dimostrazione, non è banale; sarebbe forse opportuno, in tali casi, rifare la figura daccapo, passo dopo passo, coordinando quel che c'è scritto nel testo, con quel che appare nella figura stessa. Ci torneremo più avanti.

La cosa non è per noi sorprendente, perché in un'altra ricerca, condotta in una seconda secondaria di primo grado (D'Amore, 1999) (a. s. 7) si era già segnalato come sembra esserci un fatale scollamento fra i due apparati semiotici:

testo scritto a contenuto geometrico	*vs*	disegno esplicito e specifico di quanto scritto.

Questa separazione-opposizione semantica fra i due apparati semiotici (testo scritto - illustrazione o disegno) e mancata reciproca informazione ricalca molte delle cose già evidenziate nel lavoro di ricerca di D'Amore (1995) nel quale si esaminava l'uso spontaneo del disegno nel corso della risoluzione di un problema da parte di studenti di diversi livelli scolastici.

Dunque, mentre per un adulto (a maggior ragione insegnante, a maggior ragione insegnante di matematica) c'è una relazione causale di significato fra un testo scritto e il disegno che lo illustra, per lo studente non sempre questo fatto è ovvio o riconoscibile. La relazione causale di significato (conversione) sopra richiesta non è tanto (o solo) da un testo scritto al disegno che lo illustra (conversione diretta), ma soprattutto da un disegno al testo di una dimostrazione che si riferisce a quel disegno (conversione inversa); lo studente, anche adulto, non in grado di stabilire una corrispondenza tra le unità di contenuto della rappresentazione figurale (il disegno) e le unità di contenuto della rappresentazione discorsiva (il testo completo, privo di spazi vuoti) sopra considerate, difficilmente riuscirà a individuare le parole mancanti, o i loro sinonimi, nel testo da ricostruire. La conversione inversa costituisce (come scrive Raymond Duval in diversi lavori) un compito cognitivo completamente differente dalla conversione diretta (dal testo al disegno), un compito spesso trascurato dall'insegnante, in questo caso non a torto. Nella dimostrazione di un teorema di geometria (e non solo), infatti, la conversione diretta da uno o più registri discorsivi a uno o più registri non-discorsivi pone in secondo piano il disegno rispetto al testo scritto, privilegiando il carattere "generale" della dimostrazione rispetto a una sua, seppur inevitabile, attualizzazione o determinazione concreta (un "singolare", nei termini di Radford, 2013): un disegno specifico che funge unicamente da rappresentazione ausiliaria. In effetti, il testo scritto della dimostrazione del teorema in esame presuppone una relazione causale di significato non con un disegno ma con uno o più "concetti figurali" (Fischbein, 1993), concetti dei quali nessuna rappresentazione figurale concreta è in grado di mostrare, cogliere o evidenziare la componente ideale, generale (come si dirà in seguito) vincolata ad assiomi, definizioni, teoremi … che costituiscono la teoria di riferimento (in questo caso la geometria euclidea).

Torniamo al nostro test di chiusura:

> Sia ABC un triangolo isoscele ~~con~~ AB = AC; il lato BC sia la ~~base~~ del triangolo. Si prolunghi AB ~~fino~~ a un punto D. Si ~~prolunghi~~ AC fino a un punto E, ~~tale~~ che CE = BD. Si traccino i ~~segmenti~~ CD e BE.

Al posto di "con" sono state scelte varie parole (che, per, lati, …) tra le quali anche qualche "con"; al posto di "base" (ben illustrata dal disegno e soprattutto dallo stereotipo che in aula lega la base di un triangolo con il lato "in basso" nella figura, parallelo al bordo inferiore del foglio), si sono avute varie parole; ma quella corretta "base" è quella che è apparsa più spesso. Ma quando si comincia a descrivere un supposto processo di sviluppo del disegno, lo studente si perde. Vede il disegno nel suo complesso ma non riesce a ricostruirlo passo dopo passo, come invece accade nel testo scritto:

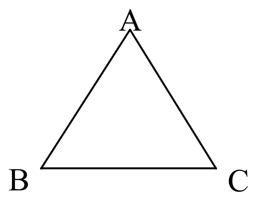
> It [one of the three guiding principles of mathematical rationality] commands all use of natural language, even in primary school, when, for example, students are asked to write messages in order to make construct a figure. (Duval, 2017, p. 89)

Abbiamo allora proposto al docente di quella classe un esperimento che abbiamo preparato per una prova effettuata qualche giorno dopo; abbiamo sostituito il secondo membro della coppia:

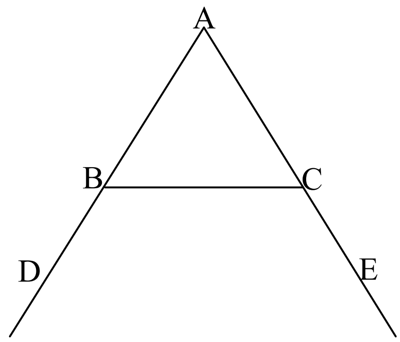
testo completo scritto – figura completa descrittiva del testo con una sequenza di disegni parziali in evoluzione ottenuta passo passo, come segue.

Dimostrazione:

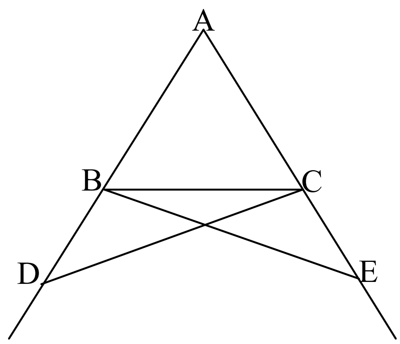
Sia ABC un triangolo isoscele con AB = AC; il lato BC sia la base del triangolo.



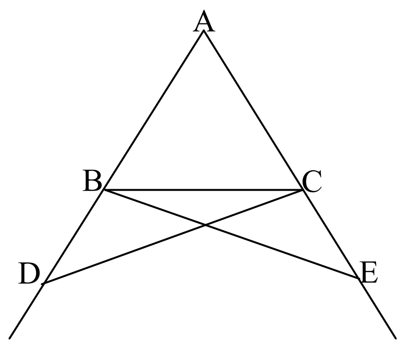
Si prolunghi AB fino a un punto D. Si prolunghi AC fino a un punto E, tale che CE = BD.



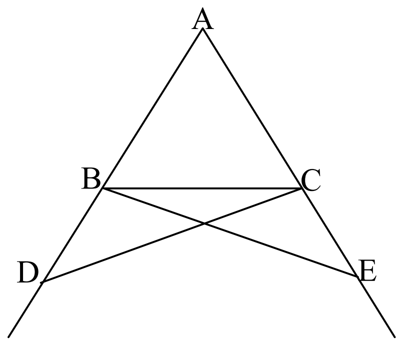
Si traccino i segmenti CD e BE.



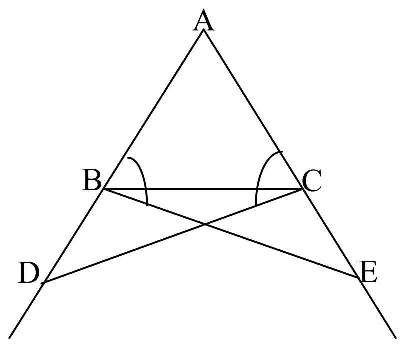
Si noti che AD = AE perché ciascuno è somma di segmenti uguali.



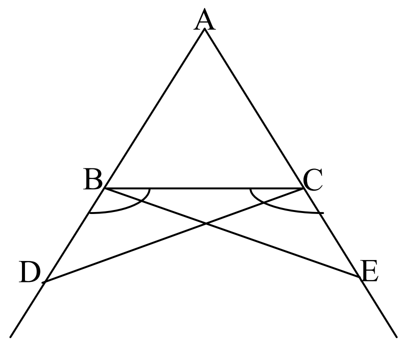
Si considerino i triangoli ABE e ACD; tali triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dato che essi hanno due lati uguali (AD = AE e AC = AB) e l'angolo A in comune. Dunque BE = CD.



Si noti che gli angoli ACD e ABE sono uguali. D'altra parte, anche i due triangoli BCD e CBE sono congruenti per il terzo criterio (BD = CE, BE = CD e BC in comune).



Dunque gli angoli CBD e BCE sono uguali.



In conclusione, gli angoli ABC e ACB sono uguali in quando differenza di angoli uguali.

Con questo apparato in evoluzione, nel quale cioè il disegno si sviluppa man mano come capita per il testo scritto, in parallelo, la comprensione della relazione fra quel che viene scritto a parole e quel che viene disegnato aumenta considerevolmente; anche il conseguente riempimento dei vuoti lasciati dalle cancellazioni nel test di chiusura migliora nettamente. Non si raggiunge la perfezione, beninteso, ma un netto miglioramento c'è.

La figura data a priori disegnata per intero, contenente già tutti gli elementi che vengono un po' alla volta richiamati nei singoli passaggi della dimostrazione, non viene recepita come destrutturabile e non viene dunque ricostruita passo dopo passo, partendo dalla figura di base (il triangolo ABC), ma come un tutt'uno che difficilmente permette un'analisi dei singoli passi. La sequenza linguistica è per sua natura più riconoscibile e visibile, frase dopo frase, ma la figura nel suo complesso no, essa si presenta come un blocco unitario, non sequenziale. Una sua ri-costruzione passo dopo passo, mette in evidenza con maggior forza la relazione fra le singole frasi (già ordinate) e la sequenza delle figure che, a partire da quella iniziale di base, giunge a quella finale.

Da qui la necessità di una visualizzazione sequenziale lineare dei passaggi richiesti per la dimostrazione non solo in registri discorsivi ma anche in registri non-discorsivi, ovvero di una decostruzione e ricostruzione non solo del testo scritto ma anche della figura che accompagna il testo scritto. In altre parole, occorre esplicitare le relazioni di congruenza semantica tra le unità di contenuto del testo (in uno o più registri discorsivi) e le unità di contenuto della figura (in uno o più registri non-discorsivi) per stimolare una gestione consapevole di tali unità, anche nei test di chiusura.

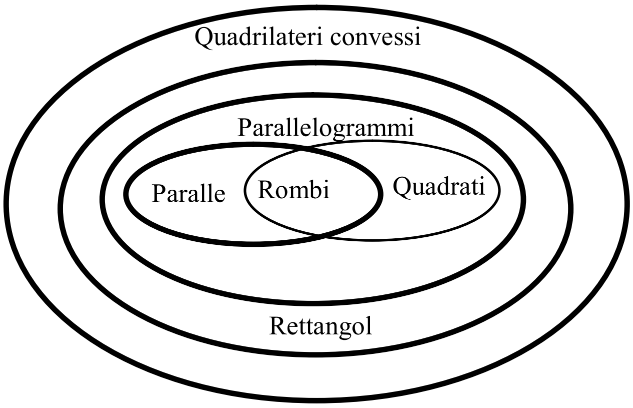
5. Contrasti semantici causati da fattori reconditi

Un brano (tratto da un testo destinato alla IV primaria) suggeritoci come possibile per la prova di comprensione in V primaria era il seguente:

Quadrilateri

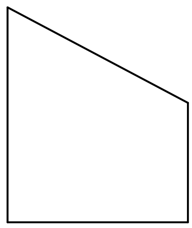
> Si chiama trapezio un quadrilatero che ha almeno due lati opposti paralleli.
>
> Si chiama parallelogramma un trapezio che ha tutte e due le coppie di lati opposti paralleli.
>
> In un parallelogramma i lati opposti sono uguali. E anche gli angoli opposti sono uguali.
>
> Si chiama rombo un parallelogramma che ha tutti e quattro i lati uguali.
>
> Si chiama rettangolo un parallelogramma che ha tutti e quattro gli angoli uguali.
>
> Si chiama quadrato un parallelogramma che ha sia tutti i lati uguali sia tutti gli angoli uguali; dunque un quadrato è sia un rombo che un rettangolo.

Segue una successione di molte figure illustrative, e poi il classico schema insiemistico che accompagna sempre questo genere di discorsi.



(In realtà, l'aggettivo "convessi" non appariva nel testo in oggetto).

Fra le figure che accompagnano a mo' di esempio i trapezi, appare la seguente:



Le Autrici auspicano che il bambino-lettore vi riconosca un trapezio, dato che si tratta di un quadrilatero con (almeno) due lati paralleli.

La cosa ci incuriosisce perché, in letture di parecchi anni fa, ci eravamo imbattuti in un'immagine esattamente di questo tipo e ci aveva colpito il fatto che essa non venisse riconosciuta come trapezio, per motivi legati alle immagini stereotipate dei trapezi che si trovano spesso su taluni libri, e suggerita talvolta graficamente in modo univoco da alcuni insegnanti. Anzi, si insiste sempre molto nel denominare "basi" quei due lati paralleli che appaiono nella figura del trapezio standard, fino a far diventare questa denominazione il nucleo significativo dell'apprendimento dell'oggetto matematico trapezio. (Per un'analisi di questo tema si veda D'Amore & Frabboni, 1996).

In questa occasione accade esattamente lo stesso: più bambini riconoscono che questo quadrilatero ha due lati paralleli, ma in qualche modo "sanno" che non è un trapezio perché non si presenta nella modalità standard che vuole disegnato il trapezio con le due "basi" parallele al lato inferiore del foglio, del bordo orizzontale della lavagna, della LIM, del pavimento, … È in qualche modo un apprendimento, non una totale mancanza di apprendimento, che però blocca apprendimenti successivi (Brousseau, 1986a, b; Fandiño Pinilla, 2015). Alcune frasi dei bambini sono significative:

- Non è mica un trapezio, non c'ha le basi.

- È come due figure: di sotto un rettangolo e un triangolo appoggiato sopra. Sono come quelle per trovare l'area delle figure non regolari.
- In un trapezio quelle due … devono essere oblique, non possono stare così.
- Eccetera.

Tutto ciò, la lotta cioè fra l'immagine stereotipata attesa e quella auspicata dal contesto apprenditivo, è già stato oggetto di molte attenzioni didattiche, a vari livelli di profondità e dunque non insisteremo. Aggiungiamo che non è specifica solo per la scuola primaria …

Vogliamo inoltre far notare la netta e profonda lotta intestina fra lo stereotipo visivo e l'apparente ragionevolezza della descrizione/definizione scritta a parole. La descrizione a parole non permette, da sola, apprendimento in questo campo, soggetta com'è alla profonda questione dei concetti figurali (Fischbein, 1993, p. 142):

> Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (...) Gli oggetti di studio e di manipolazione nel ragionamento geometrico sono allora entità mentali, da noi chiamate *concetti figurali*, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali – come idealità, astrattezza, generalità, perfezione. Non intendo affermare che la rappresentazione che abbiamo in mente, quando immaginiamo una figura geometrica, sia priva di ogni qualità sensoriale (come il colore) eccetto le proprietà spaziali; ma affermo che, mentre operiamo con una figura geometrica, noi agiamo come se *nessun'altra qualità contasse*.

(Si veda anche: D'Amore & Fandiño Pinilla, 2018).

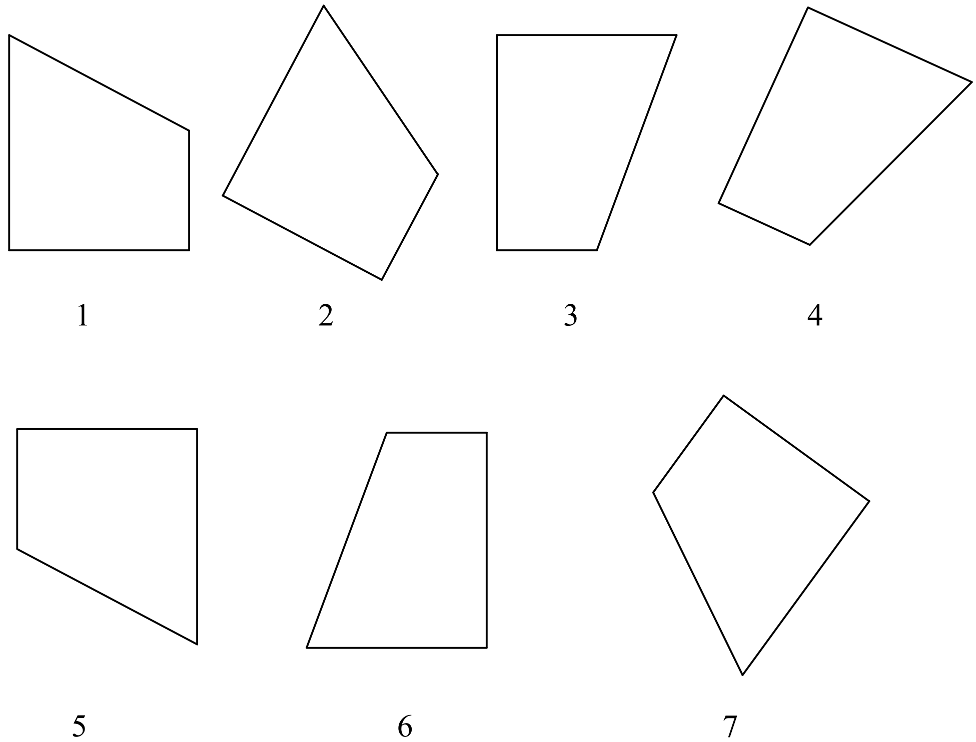
Il problema si acutizza se trasformiamo le prime righe di quel testo in una prova di chiusura:

Quadrilateri

Si chiama trapezio un _____ che ha almeno due _____ opposti paralleli.
Si chiama _____ un trapezio che ha _____ e due le coppie _____ lati opposti paralleli.
In _____ parallelogramma i lati opposti _____ uguali. E anche gli _____ opposti sono uguali.
Si _____ rombo un parallelogramma che _____ tutti e quattro i _____ uguali.
…

Sebbene i bambini frequentassero la quinta primaria e il testo fosse proposto dall'autore per la quarta, la complessità del test di chiusura è altissima; per vari motivi che il lettore potrà immaginare da solo.

Indipendentemente dall'effettuazione della ricerca, spinti dal desiderio di far arrivare gli allievi a un apprendimento, suggerimmo di guardare quello strano quadrilatero da vari … punti di vista, facendolo cioè ruotare sul foglio:



Solo la figura 6 è accettata in buona percentuale come trapezio, nemmeno la 3. Ma la cosa più interessante è che, pur rendendosi conto (crediamo di poter dire tutti gli studenti della classe) che le figure da 2 a 7 sono ottenute dalla 1 per rotazione (ovviamente, ognuno lo dice a modo suo, sebbene la trasformazione di rotazione come isometria sia stata recentemente trattata in aula, insieme alla traslazione), a ogni figura viene dato un nome diverso, con una certa coerenza; per esempio, nella 5, «adesso il triangolo è in basso»; qualcuno chiama la 7 "rombo". Eccetera.

Notiamo, in chiusura di paragrafo, che il risultato del riempimento del test di chiusura si rivela drammaticamente difficile per tutti; ma in gran parte ciò dipende dalla casualità che, tra le parole cancellate, alcune sono notevolmente significative per il discorso e dunque avere la capacità e la padronanza di rimetterle al loro posto è tutt'altro che banale.

Ovviamente quel testo alla fine non fu scelto per la prova di comprensione …

6. Sistema decimale posizionale: il contrasto fra posizione e valore

Come tutti sanno, il nostro attuale sistema posizionale si dice decimale semplicemente perché, per passare da un valore a un altro, si raccoglie a dieci a dieci:

- raccogliendo dieci unità si ha UNA decina
- raccogliendo dieci decine si ha UN centinaio
- raccogliendo dieci centinaia si ha UN migliaio;
- la maggior parte dei testi pone qui un "eccetera" o un "e così via", anche se non è proprio così.[2]

Questa spiegazione sembra banale, ma non lo è affatto; e non sempre e non solo per gli allievi. Per esempio, nel numerale 124 è evidente che si hanno: 1 centinaio - 12 decine - 124 unità. Mentre, a causa delle cifre che appaiono nelle singole posizioni, si usa scrivere, dire e pretendere che si dica:

> la cifra 4 indica le unità - la cifra 2 indica le decine - la cifra 1 indica le centinaia,

provocando una certa confusione con la quale si spiega perché studenti e non solo sono spinti a dire che:

> nel numerale 124 ci sono 4 unità, 2 decine e 1 centinaio,

confondendo dunque i simboli puramente indicativi locali (i coefficienti delle potenze di 10 nella rappresentazione polinomiale in base dieci del numero) con quelli significativi globali.

Questa convinzione, suffragata da richieste non sempre ben formulate né da taluni testi né da talune spiegazioni, provoca sbandamenti a tutti ben noti che si riflettono anche nei risultati delle cosiddette Prove Invalsi, com'è ben noto. Ciò provoca un'interpretazione distorta anche dei testi che trattano questo argomento.

Analizziamo la comprensione di questo brano proposto a bambini di seconda primaria:

> Nel numero 124 c'è 1 centinaio, dunque nell'abaco mettiamo una pedina sull'asticciola delle centinaia; nell'asticciola delle decine metteremo 2 pedine; in quella delle unità, 4 pedine. Ma devi stare attento: nel numero 124 ci sono 12 decine e non solo 2; 124 contiene 124 unità e non solo 4.

Lo riscriviamo eliminando le parole che occupano un posto di numero ordinale multiplo di 5:

> Nel numero 124 c'è 1 _____, dunque nell'abaco mettiamo _____ pedina sull'asticciola delle _____; nell'asticciola delle decine _____ 2 pedine; in quella

[2] Una decina di migliaia non ha un nome speciale e così di seguito, a parte casi sporadici, spesso con nomi non condivisi: mille migliaia si chiamano milione, mille milioni si chiamano miliardo o bilione; mille miliardi o bilioni si chiamano in vari modi, biliardo, trilione eccetera.

delle _____, 4 pedine. Ma devi stare _____: nel numero 124 ci sono 12 _____ e non solo 2; 124 contiene 124 ____ e non solo 4.

Mentre la prima parte del testo, fino al punto fermo, non produce danni troppo gravi, a parte la terza parola cancellata (centinaia) che viene variamente interpretata, nella seconda parte del testo, dopo il punto fermo, la ricerca delle ulteriori parole mancanti produce grandi difficoltà. I bambini sanno che, nel numerale 124, la cifra 1 rappresenta centinaia, 2 decine e 4 unità, ma quel che rappresenta il numerale 12 all'interno di 124 sfugge loro di mano e tentano con termini scelti a caso: centinaia, decine e unità, ma senza dare un senso aritmetico a questa scelta; lo stesso si ritrova per la parola "unità" finale. Cioè gli studenti di primaria sono abituati a porre in relazione i termini: unità - decine - centinaia con numeri di una sola cifra, quelli che appaiono nei singoli "posti", non di due o tre cifre come si pretende nel testo esaminato.[3]

Così questo testo, che appare all'inizio innocuo, si rivela invece assai complesso; e, grazie alla sua analisi con il test di chiusura, mostra la grande difficoltà che persiste tra gli studenti circa la questione relativa all'analisi della scrittura posizionale dei numeri naturali.

7. Conclusione

Nel compiere ricerche, capita spesso che, al di là delle osservazioni compiute in modo strettamente connesso al tema di ricerca, si abbiano informazioni e risultati che esulano dal tema stesso. Normalmente tali osservazioni possono venir prese in considerazione o meno; o, come nel nostro caso, messe da parte per successive indagini.

Qui abbiamo voluto esemplificare questa circostanza, soprattutto perché ci pare che quel che emerge, pur non facendo parte di un vero e proprio apparato di ricerca, possa comunque costituire un tema di un certo qual interesse concreto per gli insegnanti.

Siamo stati spinti a ciò da un lavoro analogo (D'Amore, 2011) che, a detta degli insegnanti che l'hanno letto, è stato riconosciuto di una qualche utilità didattica.

Siamo convinti infatti che, mentre è dato per scontato che i risultati delle ricerche in didattica della matematica dovrebbero fornire agli insegnanti in aula materiali preziosi, ogni altro risultato parziale o casuale, esaminato con gli strumenti messi oggi a disposizione dei ricercatori in questo campo, possa generare conoscenza professionale.

Nei casi da noi esaminati:

[3] A volte si usa una strategia "cromatica" dall'esito didattico mortale: le unità devono avere un certo colore, supponiamo rosa; le decine uno diverso e così via; in queste condizioni la confusione che stiamo descrivendo è totale: nel numero 124 il colore rosa è riservato a 4 unità, impossibile pensare a 124 unità rosa.

- indicazioni semantiche delle componenti redazionali (titolo del capitolo, indice, …)
- relazioni fra testo scritto e figura geometrica che lo illustra (esempio della dimostrazione)
- stereotipi figurali e semantica della definizione scritta a parole
- sistema decimale posizionale

abbiamo messo in evidenza situazioni che, pur non essendo state oggetto di una vera e propria ricerca scientifica, forniscono riflessioni utili all'insegnante per prendere in esame cautele nel difficile e complesso processo di insegnamento-apprendimento.

Ringraziamenti

Ringrazio la prof.ssa Maura Iori, attenta e generosa lettrice, prodiga di preziosi consigli che mi hanno permesso di approfondire alcune considerazioni in punti critici del lavoro. Ringrazio i tre referee per le note accurate e precise che mi hanno permesso alcune precisazioni che considero pertinenti. Ringrazio il prof. Bruno D'Amore per aver assunto l'incarico di tradurre questo lavoro dall'… itagnolo all'italiano.

Riferimenti bibliografici

Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignements des mathématiques* (Thèse d'État). Université Sciences et Technologies, Bordeaux I.

Brousseau, G. (1986b). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33–115.

D'Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328–370.

D'Amore, B. (Ed.). (1999). *Continuità e scuola*. Progetto per un percorso formativo unitario dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Vol. 3: *La Matematica*. Prefazione di Bruno D'Amore. Quaderni di Documentazione dell'Istituto Pedagogico di Bolzano, n. 6. Milano-Bolzano: Junior.

D'Amore, B. (2011). Frasi che hanno condizionato e diretto la mia ricerca. *Bollettino dei docenti di matematica*, *32*(62), 39–50.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). A formula for an objective measurement of students' understanding difficulties of a mathematical text: Evaluative and educational use. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *52*(1–2), 27–58.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Una formula per la misurazione oggettiva della difficoltà di comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti. Uso valutativo e uso didattico. *La matematica e la sua didattica*, *24*(1–2), 59–78.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2018). Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 247–291.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Foreword by Bruno D'Amore. Cham (Switzerland): Springer International Publishing AG.

Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Difficoltà nell'apprendimento della matematica. In L. Salvucci (Ed.), *Strumenti per la didattica della matematica: Ricerche, esperienze, buone pratiche*. Milano: Franco Angeli.

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2015). Una fórmula para medir objetivamente la dificultad de los estudiantes en la comprensión de un texto matemático. Uso con fines evaluativos didácticos. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica*. Textos completos de las conferencias dictadas por lo conferencistas invitados al Congreso Internacional: *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9–11 septiembre 2015 (pp. 183–214). Chia (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Gagatsis, A. (1982). *Discrimination des scores au test de clôture et évaluation de la compréhension des textes mathématique* (Thèse de 3e cycle). Université de Strasbourg.

Gagatsis, A. (1984). Préalables a une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *5*(1), 43–80.

Gagatsis, A. (1985). Questions soulevées par le test de closure. *Revue Française de Pédagogie*, *70*, 41–50.

Gagatsis, A. (1995). Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici. *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 136–146.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7–44.